Chapitre 2 : Nombres complexes et trigonométrie

Table des matières

Historiquement, l'introduction des nombres complexes date du XVIe siècle, quand certains mathématiciens italiens (Cardan, Bombelli, Tartaglia, Ferrari) ont essayé d'obtenir les solutions générales des équations du 3e et 4e degré. Pour cela, ils ont eu besoin de considérer des nombres dont le carré serait négatif. Les racines carrées qui apparaissent dans le calcul de ces solutions n'existent tout simplement pas. Oui, mais voilà, en utilisant ces nombres inexistants comme étapes intermédiaires, la méthode de Cardan parvient tout de même à tomber sur le bon résultat.

Jerôme Cardan
(1501-1576)

1 Calculs algébriques sur les complexes

1.1 Forme algébrique, partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe

Définition 1.1 (nombres complexes)

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est constitué de tous les nombres z de la forme $a + \mathbf{i}b$ avec a et b des réels, et $\mathbf{i}$ une constante qui est telle que $\mathbf{i}^2 = -1$.
Cette écriture est appelée forme algébrique d'un nombre complexe. Dans cette écriture :

- le réel a est appelé partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$;
- le réel b est appelé partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

On munit $\mathbb{C}$ des deux opérations suivantes, appelées *lois internes* :

- l'*addition* définie par $(a + \mathbf{i}b) + (c + \mathbf{i}d) = (a + c) + \mathbf{i}(b + d)$.
- la *multiplication* définie par $(a + \mathbf{i}b) \times (c + \mathbf{i}d) = (ac - bd) + \mathbf{i}(bc + ad)$.

Ces lois vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 1.2 ($(\mathbb{C}, +, \times)$ est un « corps »)

(i) Les lois $+$ et $\times$ sont internes, *i.e.* : $\forall z,z' \in \mathbb{C}, z + z' \in \mathbb{C}$ et $z \times z' \in \mathbb{C}$.
(ii) Les lois $+$ et $\times$ sont commutatives, *i.e.* : $\forall z,z' \in \mathbb{C}, z + z' = z' + z$ et $z \times z' = z' \times z$.
(iii) Les lois $+$ et $\times$ sont associatives, *i.e.* :

$$\forall z,z',z'' \in \mathbb{C}, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') \text{ et } (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$$

(iv) 0 est l'élément neutre pour la loi $+$ et 1 est l'élément neutre pour la loi $\times$.
(v) Tout élément $z \in \mathbb{C}$ admet un opposé noté $-z$ et tout élément $z \in \mathbb{C}^*$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$.
(vi) La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$, *i.e.* : $\forall z,z',z'' \in \mathbb{C}, z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$.

Remarques :

- Le produit $z \times z'$ s'écrira plus simplement zz'.
- Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$. On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est « intègre ».

Définition 1.3 (nombre imaginaire pur)

Un nombre imaginaire pur est un complexe de la forme $\mathbf{i}\,b$, avec $b \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $\mathbf{i}\,\mathbb{R}$.

Proposition 1.4 (caractérisation 1 des réels, des imaginaires purs)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\quad z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \quad$ et $\quad z \in \mathbf{i}\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

Proposition 1.5 (linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire)

Pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$ et λ, $\lambda' \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{Re}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \lambda' \mathrm{Re}(z') \qquad \mathrm{Im}(\lambda z + \lambda' z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \lambda' \mathrm{Im}(z')$$

En particulier, pour tous complexes z et z' :
- $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Re}(z-z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z-z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z')$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$

1.2 Conjugaison

Définition 1.6 (conjugué d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $a + \mathbf{i}\, b$ (avec a et $b \in \mathbb{R}$).
Le conjugué de z est le nombre complexe $a - \mathbf{i}\, b$. Il est noté $\overline{z}$.

Remarques :
1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$: la conjugaison est *involutive*.
2. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = 0 \Longleftrightarrow \overline{z} = 0$.

Proposition 1.7 (expression des parties réelle et imaginaire à l'aide du conjugué)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathbf{i}}$$

Corollaire 1.8 (caractérisation des réels, des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z} \qquad z \in \mathbf{i}\,\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$$

Proposition 1.9 (compatibilité de la conjugaison avec les opérations)

Pour tous z et $z' \in \mathbb{C}$:
1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
4. si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Conséquence : Soit $z \in \mathbb{C}$.
1. On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
2. Si de plus $z \neq 0$, alors pour $n \in \mathbb{Z}_-$, de la forme $-k$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\overline{z^n} = \overline{z^{-k}} = \overline{\left(\frac{1}{z^k}\right)} = \frac{1}{\overline{z^k}} = \frac{1}{\overline{z}^k} = \overline{z}^{-k} = \overline{z}^n$$

donc au final : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Remarque : Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $a + \mathbf{i}\, b$ (avec a et $b \in \mathbb{R}$).
Alors $z\overline{z} = (a + \mathbf{i}\, b)(a - \mathbf{i}b) = a^2 - \mathbf{i}^2\, b^2 = a^2 + b^2$.
En particulier : $z\overline{z}$ est un réel positif.

Application au calcul d'un quotient sous forme algébrique :
Pour calculer $\dfrac{z}{z'}$ (avec $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$), on « multiplie par le conjugué du dénominateur », *i.e.* on calcule $\dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$ (le dénominateur est alors un réel).

Exemple 1.10 : Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1+2\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}$.

1.3 Module

Définition 1.11 (module d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le <u>module de z</u> est le réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$. Il est noté $|z|$.

Il faut retenir que $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$.

Calcul du module à partir de la forme algébrique :
Si $z \in \mathbb{C}$ est de forme algébrique $a + \mathbf{i}\,b$ (avec a et $b \in \mathbb{R}$), alors : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarques :

1. $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$
2. Le module d'un réel est égal à sa valeur absolue, ce qui justifie qu'on les note de la même façon.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = 0 \iff |z| = 0$.
   Par conséquent, si $z \neq 0$, alors $|z| > 0$.

Proposition 1.12 (encadrement des parties réelles et imaginaires)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$, c'est-à-dire $-|z| \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
2. $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$, c'est-à-dire $-|z| \leqslant \mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$

Proposition 1.13 (compatibilité du module avec les opérations $\times$ et $\div$)

Pour tous z et $z' \in \mathbb{C}$:

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$
2. si $z' \neq 0$, alors $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Conséquence : Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. On peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |z^n| = |z|^n$.
2. Si de plus $z \neq 0$, alors : $\forall n \in \mathbb{Z},\ |z^n| = |z|^n$.

Remarque : En revanche, les opérations $+$ et $-$ ne sont pas compatibles avec le module. En général, on aura seulement des inégalités.

Théorème 1.14 (inégalité triangulaire)

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

1. $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$
2. cas d'égalité : $|z+z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$

Corollaire 1.15 (inégalité triangulaire inversée)

Pour tous z et $z' \in \mathbb{C}$:

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$$

2 Représentation géométrique des nombres complexes

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$.

2.1 Affixes et images

Définition 2.1 (point image et vecteur image d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $a + \mathbf{i}\,b$ (avec a et $b \in \mathbb{R}$).
On appelle :

1. point image de z le point du plan de coordonnées $(a\,,b)$;
2. vecteur image de z le vecteur du plan de coordonnées $(a\,,b)$.

Définition 2.2 (affixe d'un point ou d'un vecteur du plan)

1. Soit M un point du plan, de coordonnées cartésiennes $(a\,,b)$.
   Le nombre complexe $a + \mathbf{i}\,b$ est appelé affixe du point M.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, de coordonnées cartésiennes $(a\,,b)$.
   Le nombre complexe $a + \mathbf{i}\,b$ est appelé affixe du vecteur $\vec{u}$.

Proposition 2.3 (correspondance entre opérations sur les vecteurs et sur les complexes)

Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectifs z_1 et z_2, et soient deux réels λ et μ.
Alors l'affixe du vecteur $\lambda\,\vec{u_1} + \mu\,\vec{u_2}$ est $\lambda\,z_1 + \mu\,z_2$.

Proposition 2.4 (affixe d'un vecteur défini par deux points)

Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectifs z_A et z_B.
Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $z_B - z_A$.

2.2 Interprétation géométrique de la conjugaison

Proposition 2.5 (interprétation géométrique de la conjugaison)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Autrement dit, la conjugaison correspond à la symétrie (orthogonale) par rapport à l'axe des abscisses.

2.3 Interprétation géométrique du module

Proposition 2.6 (interprétation géométrique du module)

Soit $z \in \mathbb{C}$, et soient M le point image de z, $\overrightarrow{u}$ le vecteur image de z.
Alors le module $|z|$ est égal à la longueur OM, ou encore à la norme $\|\overrightarrow{u}\|$.

Corollaire 2.7 (interprétation géométrique du module d'une différence)

Soient A et B deux points du plan, d'affixes respectifs z_A et z_B.
Alors la longueur AB est égale à $|z_B - z_A|$.

Proposition 2.8 (cercles et disques)

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
On note M_0 le point d'affixe z_0.

1. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| = r\}$ correspond au cercle de centre M_0 et de rayon r.
2. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| \leqslant r\}$ correspond au disque fermé de centre M_0 et de rayon r.
3. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < r\}$ correspond au disque ouvert de centre M_0 et de rayon r.

3 Équations algébriques

Définition 3.1 (équation algébrique)

Une équation algébrique est un équation d'inconnue complexe $z \in \mathbb{C}$ de la forme

$$P(z) = 0$$

où P est une fonction polynomiale *i.e.* $P : z \mapsto a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.
Dans le cas où $a_n \neq 0$, on dit que la fonction polynomiale et l'équation sont de degré n.

Note culturelle sur les équations algébriques :
Théorème de D'Alembert-Gauss (1799) : toute équation de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.
De plus, lorsque $n \leqslant 4$, il existe des méthodes pour résoudre explicitement n'importe laquelle de ces équations (méthode de Cardan pour $n = 3$, de Ferrari pour $n = 4$).
En revanche, ceci n'est plus possible pour un degré $n \geqslant 5$ (*théorème de Galois*, 1831) ; on peut néanmoins utiliser des méthodes numériques pour trouver des valeurs approchées des solutions (qui existent toujours).

Proposition 3.2 (factorisation en cas de racine)

Soit P une fonction polynomiale non nulle.
Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
Alors il existe une fonction polynomiale Q de degré strictement inférieur à P telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = (z - \alpha)Q(z)$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$ si et seulement si $z = \alpha$ ou $Q(z) = 0$.

Méthode 1 : *Dans la résolution d'une équation algébrique, il est intéressant de trouver des solutions particulières afin de se ramener à une équation de degré inférieur.*

Exemple 3.3 : Déterminer les solutions de l'équation d'inconnue complexe z suivante $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 3.4 (racine carrée d'un nombre complexe)

Soit $a \in \mathbb{C}$.
On appelle racine carrée de a tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Exemple 3.5 :

1. Les racines carrées de -1 sont $\mathbf{i}$ et $-\mathbf{i}$, car :
   $z^2 = -1 \iff z^2 = \mathbf{i}^2 \iff z^2 - \mathbf{i}^2 = 0 \iff (z-\mathbf{i})(z+\mathbf{i}) = 0 \iff (z-\mathbf{i} = 0 \text{ ou } z+\mathbf{i} = 0) \iff (z = \mathbf{i} \text{ ou } z = -\mathbf{i})$
2. Les racines carrées de 2 sont ...
3. Les racines carrées de -2 sont ...

Remarque : Un complexe pouvant admettre plusieurs racines carrées, on ne peut pas utiliser le symbole $\sqrt{a}$ lorsque $a \in \mathbb{C}$ (sauf quand $a \in \mathbb{R}_+$: dans ce cas $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif x tel que $x^2 = a$).

Théorème 3.6 (calcul des racines carrées d'un nombre complexe non nul)

Tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ possède exactement deux racines carrées, qui sont opposées.

La démonstration de ce théorème sera vue plus loin. En pratique, pour calculer une ou les racine(s) carrée(s) d'un nombre complexe, on raisonne par équivalence en utilisant le module pour obtenir une équation supplémentaire.

Exemple 3.7 : Calculer les racines carrées complexes de $5 - 12\mathbf{i}$.

3.2 Cas général

Théorème 3.8 (résolution d'une équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$)

Soient a, b et $c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$.
On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé discriminant de l'équation.

1. Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée complexe de Δ.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution : $\dfrac{-b}{2a}$ (dite solution double).

Remarques :

1. Il n'y a pas lieu de discuter suivant le signe du discriminant Δ, car celui-ci n'est pas forcément réel.
2. Au cours de la démonstration, on voit en particulier que l'expression $az^2 + bz + c$ se factorise en $a(z - z_1)(z - z_2)$, avec z_1 et z_2 les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Corollaire 3.9 (cas particulier des équations du second degré à coefficients réels)

Soient a, b et $c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$.
On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation (qui est ici un réel).

1. Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes distinctes : $\dfrac{-b+\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
3. Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle : $\dfrac{-b}{2a}$.

Proposition 3.10 (relations entre coefficients et racines d'une équation du second degré)

Soient a, b et $c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$, et soient z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$.
Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. z_1 et z_2 sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
2. $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Conséquence : Pour chercher des nombres complexes z_1 et z_2 dont on connaît la somme S et le produit P, on résout l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.

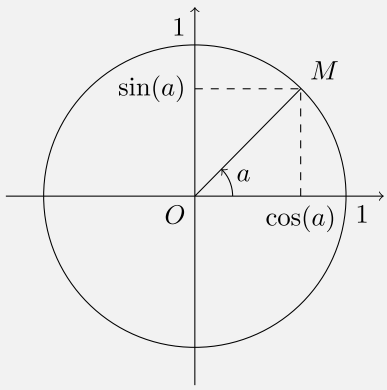
Exemple 3.11 : Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2\mathbf{i} \\ z_1 z_2 = 2 - 4\mathbf{i} \end{cases}$ d'inconnues complexes z_1 et z_2.

4 Formes trigonométriques d'un nombre complexe

4.1 Trigonométrie

Définition 4.1 (cosinus,sinus)

Soit $a \in \mathbb{R}$.
On note M le point du cercle trigonométrique tel que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ forme un angle de mesure a avec l'axe des abscisses.
On appelle <u>cosinus de a</u> et on note $\cos(a)$ l'abscisse du point M.
On appelle <u>sinus de a</u> et on note $\sin(a)$ l'ordonnée du point M.



Note culturelle sur les fonctions trigonométriques :
Bien que l'histoire des fonctions trigonométriques semble avoir débuté il y a environ 4 000 ans, l'écrit le plus ancien du sinus apparaît au VIII[e] siècle av. J.-C. dans des textes religieux écrits en indien ancien. On y trouve notamment la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{4})$.

4.1.1 Formulaire

Soient a et $b \in \mathbb{R}$.

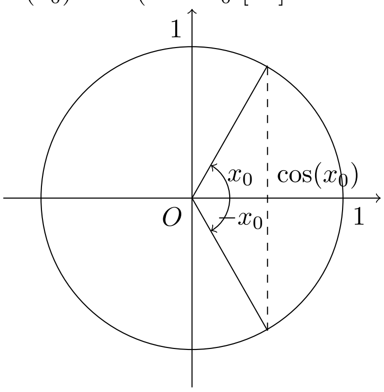
1. $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
2. **Formules d'addition :**
   - $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   - $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
3. **Formules de soustraction :**
   - $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
   - $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
4. **Formules de duplication :**
   - $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
   - $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
5. **Formules de linéarisation :**
   - $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
   - $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
   - $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
   - $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$
   - $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$

Cas particuliers des formules d'addition :

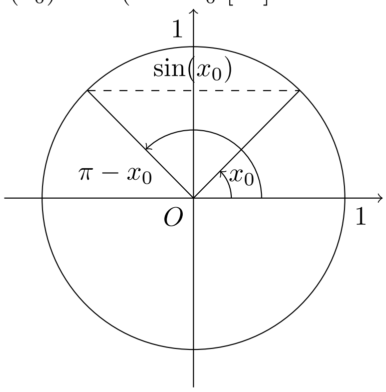
- $\cos(a+\pi) = \cos(a-\pi) = -\cos(a)$
- $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
- $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin(a)$
- $\cos(a - \frac{\pi}{2}) = \sin(a)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$
- $\sin(a+\pi) = \sin(a-\pi) = -\sin(a)$
- $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
- $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos(a)$
- $\sin(a - \frac{\pi}{2}) = -\cos(a)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a)$

Résolution d'équations trigonométriques :

$\cos(x) = \cos(x_0) \iff (\ x \equiv x_0\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -x_0\ [2\pi]\ )$



$\sin(x) = \sin(x_0) \iff (\ x \equiv x_0\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - x_0\ [2\pi]\ )$



Exemple 4.2 :

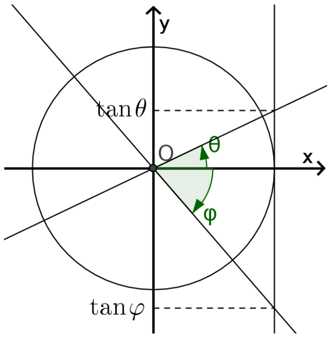
- Résoudre l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.
- Résoudre l'inéquation $\sin(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.1.2 Tangente

Définition 4.3 (tangente)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$, on définit $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Relation dans un triangle rectangle : $\ll \tan = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \gg$



Quelques valeurs particulières :

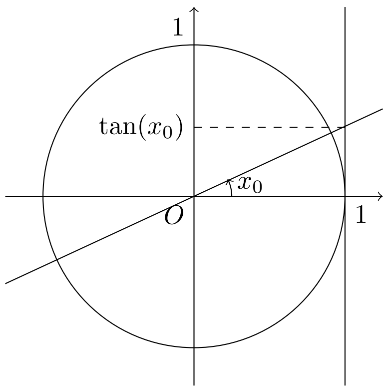
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Relations à connaître : Soient a et b dans $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

- **Imparité :** $\tan(-a) = -\tan(a)$
- **Périodicité :** $\forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(a + k\pi) = \tan(a)$
- **Formule d'addition :** $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ (si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
- **Formule de soustraction :** $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$ (si $a - b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
- **Formule de duplication :** $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ (si $2a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
- **Relation entre tangente et cosinus :** $1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$

Résolution d'équations trigonométriques :

$$\tan(x) = \tan(x_0) \iff x \equiv x_0\ [\pi]$$



Exemple 4.4 :

- Résoudre l'équation $\tan(x) = 1$.
- Résoudre l'inéquation $\tan(x) \leqslant \sqrt{3}$.

4.2 Nombres complexes de module 1

Notation : On définit l'ensemble $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ (ensemble des nombres complexes de module 1).

Remarque : Si $z \in \mathbb{U}$, alors $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

Définition 4.5 (exponentielle d'un nombre imaginaire pur)

Soit un réel θ. On définit le nombre complexe $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta$.

Remarque : Pour tout réel θ : $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta} = \overline{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}$ (la dernière égalité est vraie car $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{U}$, c.f. ci-dessous)

Théorème 4.6 (paramétrisation du cercle unité par cosinus et sinus)

$$\mathbb{U} = \left\{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

Valeurs particulières à connaître : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}0} = 1$ $\quad$ $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = -1$ $\quad$ $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathbf{i}$

Proposition 4.7 (formules d'Euler)

Pour tout réel θ :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\,\mathbf{i}}$$

Théorème 4.8 (exponentielle d'une somme de deux imaginaires purs)

Pour tous réels θ et φ : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta+\varphi)} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi}$.

Remarque : On en déduit, pour tous réels θ et θ' : $\mathbf{e}^{\mathbf{i}(\theta-\theta')} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta'} = \dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'}}$.

Corollaire 4.9 (formule de Moivre)

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\mathbf{e}^{n\mathbf{i}\theta} = \left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\right)^n$.

Exemple 4.10 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin^3(x)$ comme une combinaison linéaire de $\sin(nx)$.
→ technique à retenir : **linéarisation des fonctions circulaires**
Exprimer $\sin(3x)$ comme un polynôme en $\sin(x)$.
→ technique à retenir : **développement des fonctions circulaires**

4.3 Arguments et formes trigonométriques

Théorème 4.11 (forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul)

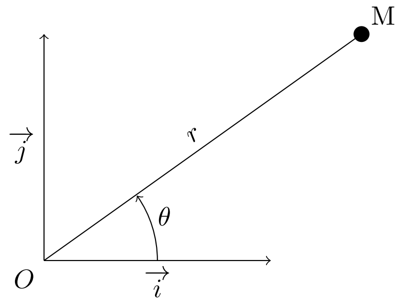
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$.
Une telle écriture est appelée <u>une forme trigonométrique de z</u>.

Démonstration. Le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il s'écrit sous la forme $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
On a donc $z = |z|\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $|z| > 0$. □

Remarque : Si $z \in \mathbb{C}^*$ a pour forme trigonométrique $r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors nécessairement $r = |z|$. On a donc unicité pour r (mais pas pour θ).

Interprétation géométrique :

Soit $z = r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note M le point image de z.
Le réel r est égal à la distance OM.
Le réel θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{OM})$.
On dit que (r,θ) est un couple de coordonnées polaires de M.



Définition 4.12 (argument d'un nombre complexe non nul)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, de forme trigonométrique $r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On dit alors que θ est un argument de z.

Attention : on a pas unicité de l'argument, néanmoins il est unique « à 2π près ».

Proposition 4.13 (condition d'égalité de deux complexes sous forme trigonométrique)

Pour tous r, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, θ, $\theta' \in \mathbb{R}$:

$$r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = r'\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta'} \iff \left\{\begin{array}{l} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \end{array}\right.$$

Conséquence : Les arguments d'un nombre complexe sont congrus entre eux modulo 2π.

Exemple 4.14 : Soit $t,p,q \in \mathbb{R}$. Factoriser $1 + \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$, $1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}t}$, $\mathbf{e}^{\mathbf{i}p} + \mathbf{e}^{\mathbf{i}q}$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}p} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}q}$.
→ technique à retenir : **factorisation par l'angle moitié**.

Théorème 4.15 (argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance)

Soient z et $z' \in \mathbb{C}^*$, et soient θ et θ' des arguments respectivement de z et z'.

1. Un argument de zz' est $\theta + \theta'$.
2. Un argument de $\dfrac{z}{z'}$ est $\theta - \theta'$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un argument de z^n est $n\theta$.

Exemple 4.16 : Calculer $(1 + \mathbf{i})^4$.

4.4 Applications

4.4.1 Alignement et orthogonalité

Théorème 4.17 (interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$)

Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C.
On considère le nombre complexe $Z = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

1. Le module de Z est égal à $\dfrac{AC}{AB}$.
2. Un argument de Z est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$.

Corollaire 4.18 (traduction de l'alignement et de l'orthogonalité)

Soient A, B et C trois points distincts du plan, d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C.

1. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
2. Les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbf{i}\,\mathbb{R}$.

Exemple 4.19 : Considérons les points du plan A, B et C, d'affixes respectives $z_A = 5 + 2\mathbf{i}$, $z_B = 2 + 6\mathbf{i}$ et $z_C = 1 - \mathbf{i}$. Le triangle ABC est il rectangle en A ?

4.4.2 Calcul des racines n-ièmes

Définition 4.20 (racines n-ièmes d'un nombre complexe)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.
On appelle <u>racine n-ième de a</u> tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Pour $n = 2$, on retrouve la notion de racines carrées.

Notation : On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Théorème 4.21 (résolution de $z^n = 1$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les n nombres complexes distincts $\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}$, pour $k \in \{0; \dots; n-1\}$.
Autrement dit, $\mathbb{U}_n = \left\{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}},\ k \in \{0; \dots; n-1\}\right\}$

Remarques :

1. En particulier : $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
2. Les n éléments de $\mathbb{U}_n$ peuvent aussi être décrits par $\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}}$, pour k dans n'importe quel ensemble de n entiers consécutifs.
3. En notant $\omega = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{n}}$, on a que $\mathbb{U}_n = \{1\,;\omega\,;\ \dots\ ;\omega^{n-1}\}$.

Exemples 4.22 : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ $\quad \mathbb{U}_2 = \{1\,;-1\}$ $\quad \mathbb{U}_3 = \left\{1\,;\mathbf{j}\,;\mathbf{j}^2\right\}$, avec $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$ $\quad \mathbb{U}_4 = \{1\,;\mathbf{i}\,;-1\,;-\mathbf{i}\}$

Attention : en physique, $\mathbf{j}$ *désigne le nombre complexe* $\mathbf{i}$ *des mathématiciens.*

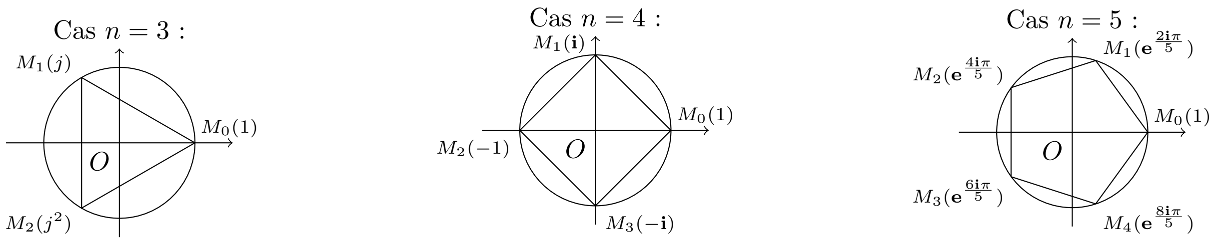
Propriétés à retenir pour le nombre complexe $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{3}}$:

$$\mathbf{j}^2 = \overline{\mathbf{j}} = \mathbf{j}^{-1} \qquad \mathbf{j}^3 = 1 \qquad \mathbf{j}^4 = \mathbf{j} \qquad \mathbf{j}^5 = \mathbf{j}^2 \qquad \mathbf{j}^6 = 1 \qquad \mathbf{j}^2 + \mathbf{j} + 1 = 0$$

Proposition 4.23 (représentation géométrique des racines n-ièmes de l'unité)

Soit un entier $n \geqslant 3$. Les racines n-ièmes de l'unité ont pour images les n sommets d'un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

Illustration :



Théorème 4.24 (résolution de $z^n = a$)

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons une forme trigonométrique $r\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ de a, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Le nombre complexe $z_0 = \sqrt[n]{r}\,\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\theta}{n}}$ est **une** racine n-ième de a.
2. **Les** racines n-ièmes de a sont au nombre de n, et elles s'obtiennent en multipliant z_0 par toutes les racines n-ièmes de l'unité. Autrement dit, l'ensemble des racines n-ièmes de a est l'ensemble :

$$\left\{ z_0 \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{n}},\ k \in \{0; \dots; n-1\} \right\}$$

Remarque : Dans le cas particulier $n = 2$, on retrouve le théorème sur les racines carrées d'un nombre complexe.

Exemple 4.25 : Trouver les racines 4-ièmes de $1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ et les racines 3-ièmes de -27.

4.4.3 Fonctions circulaires et factorisation

Factorisation de $\cos(x) \pm \cos(y)$, de $\sin(x) \pm \sin(y)$:
Factoriser $\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} \pm \mathbf{e}^{\mathbf{i}y}$ en utilisant une factorisation par l'angle moitié, puis prendre la partie réelle ou imaginaire.

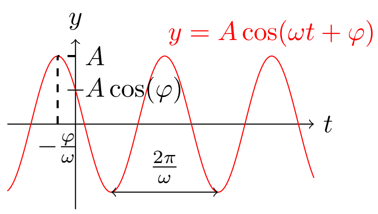
Exemple 4.26 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $\sin(x) + \sin(3x)$.

Proposition 4.27 (transformation de $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ en $A\cos(\omega t + \varphi)$)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in]-\pi; \pi]$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Une telle fonction est appelée fonction sinusoïdale.

- Sa période est $\frac{2\pi}{\omega}$.
- A est l'amplitude des oscillations.
- φ est la phase à l'origine.



Exemple 4.28 : Résoudre l'équation $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$ d'inconnue réelle x.

5 Exponentielle complexe

Définition 5.1 (exponentielle d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$, de forme algébrique $z = a + \mathbf{i}\, b$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.
L'exponentielle de z, notée $\exp(z)$ ou $\mathbf{e}^z$, est le nombre complexe $\mathbf{e}^a\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}\, b}$.

Remarque : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{e}^z \neq 0$.

Proposition 5.2 (module et argument d'un exponentielle complexe)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le complexe $\mathbf{e}^z$ a pour module $\mathbf{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et pour argument $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 5.3 (exponentielle d'une somme)

Pour tous z et $z' \in \mathbb{C}$, $\mathbf{e}^{z+z'} = \mathbf{e}^z \mathbf{e}^{z'}$.

Conséquence : Pour tous z et $z' \in \mathbb{C}$: $\mathbf{e}^{-z} = \frac{1}{\mathbf{e}^z}$ $\quad \mathbf{e}^{z-z'} = \frac{\mathbf{e}^z}{\mathbf{e}^{z'}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{e}^{nz} = (\mathbf{e}^z)^n$

Proposition 5.4 (exponentielle d'un conjugué)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$.

Proposition 5.5 (condition d'égalité de deux exponentielles complexes)

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \ : \qquad \exp(z) = \exp(z') \iff z \equiv z' \quad [2\,\mathbf{i}\,\pi]$$

Méthode : Pour résoudre une équation du type $\mathbf{e}^z = y$, écrire le second membre y sous forme exponentielle complexe.

Exemple 5.6 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathbf{e}^z = -2$.

6 Transformations du plan

Dans cette partie, on notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des points du plan. Une transformation du plan est une application de $\mathcal{P}$ dans lui-même. Une telle transformation correspond à une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Transformations à connaître :

- La fonction complexe $z \mapsto \overline{z}$ correspond à la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
- La fonction complexe $z \mapsto -z$ correspond à la symétrie centrale par rapport à l'origine.
- Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe $b \in \mathbb{C}$. La fonction complexe $z \mapsto z + b$ correspond à la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction complexe $z \mapsto \lambda z$ correspond à l'homothétie de centre O et de rapport λ.
  Cela signifie que l'image d'un point M est le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La fonction complexe $z \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} z$ correspond à la rotation de centre O et d'angle θ.
  Cela signifie que l'image d'un point M est le point M' défini par : $\begin{cases} OM = OM' \\ \text{L'angle orienté } (\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}) \text{ a pour mesure } \theta \end{cases}$